Concursul de Matematică "Gheorghe S. Nadiu"
Ediţia I, Oradea, Aprilie 2011

Subiecte clasa a IX-a

1. Să se determine un şir $\{A_n\}_{n\geq 1}$ de mulţimi de numere naturale cu proprietăţile:

i) $A_n \cap A_m = \emptyset$ dacă $n \neq m$;

ii) A_n are n elemente, pentru fiecare $n \geq 1$;

iii) Dacă n îl divide pe m atunci suma elementelor mulţimii A_n divide suma elementelor mulţimii A_m.

2. Fie $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$. Arătaţi că

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2\right]\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2\right] \geq \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right)\right]^2.$$

3. Pe dreapta suport a laturii $[BC]$ a triunghiului oarecare ABC, luăm două puncte M şi N simetrice faţă de mijlocul laturii $[BC]$; pe dreapta suport a laturii $[AC]$ luăm două puncte P şi Q simetrice faţă de mijlocul laturii $[AC]$; iar pe dreapta suport a laturii $[AB]$ luăm două puncte R şi S simetrice faţă de mijlocul laturii $[AB]$. Notăm apoi cu X, Y şi Z mijloacele segmentelor $[QR]$, $[SM]$ şi respectiv $[NP]$. Arătaţi că:

a) Triunghiurile ABC şi XYZ au acelaşi centru de greutate;

b) Dreptele AX, BY şi CZ sunt paralele sau concurente.

4. Se consideră paralelogramul $ABCD$. Fie punctele $M \in (AD)$, $N \in (AB)$, $P \in (BC)$ şi $\{T\} = MP \cap CN$. Să se determine locul geometric al centrului de greutate al triunghiului MNP ştiind că patrulaterele $MTCD$ şi $NBPT$ sunt echivalente.