Concursul de Matematică "Gheorghe S. Nadiu" Ediţia I, Oradea, Aprilie 2011

Subiecte clasa a VIII-a

1. Să se determine numerele reale $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $n \geq 2$ care verifică relaţia:

$$\left(x_1^{2010} + x_2^{2010} + \ldots + x_n^{2010}\right)^{2011} = \left(x_1^{2011} + x_2^{2011} + \ldots + x_n^{2011}\right)^{2010}.$$

2. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_{2011} \in (0, \infty)$ astfel încât

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2^2 + x_3^2}{x_2 + x_3} + \ldots + \frac{x_{2011}^2 + x_1^2}{x_{2011} + x_1} = x_1 + x_2 + \ldots + x_{2011}.$$

Arătaţi că numărul

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2011}}{x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \ldots + x_{2011}}$$

este natural.

3. Fie $ABCD$ un tetraedru tridreptunghic in A, $AO \perp (BCD)$, $O \in (BCD)$ şi $BO \cap CD = \{E\}$. Se ştie că lungimile muchiilor AB, AC, AD sunt numere naturale şi că există $F \in (AO)$ astfel încât $\widehat{ABF} = \widehat{AEF}$. Demonstraţi că $CD \in \mathbb{N}^*$ şi daţi un exemplu de tetraedru care satisface toate cerinţele problemei.

4. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată. Fie $M \in (VA)$, $N \in (VB)$, $P \in (VC)$ şi $Q \in (VD)$ astfel încât $AM = BN = VP = VQ$.

a) Să se arate că punctele M, N, P, Q sunt coplanare.

b) Să se arate că $\mathcal{A}_{MNPQ} \geq \frac{1}{4}\mathcal{A}_{ABCD}$.