Concursul de Matematică "Gheorghe S. Nadiu"
Ediţia I, Oradea, Aprilie 2011

Subiecte clasa a XII-a

1. Fie $f, r \in \mathbb{R}[X]$ două polinoame de acelaşi grad $n \geq 3$ şi

$$M = \{g \in \mathbb{R}[X] : \text{ restul împărţirii lui } f^2 \text{ la } g \text{ este } r\}.$$

Demonstraţi că dacă $g, h \in M$ au exact o rădăcină comună în $\mathbb{C}$, atunci polinoamele derivate g' şi h' au cel puţin o rădăcină comună.

2. Fie $M = \mathcal{M}_n(R)$ inelul matricelor pătratice de ordinul n ($n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$) cu elemente din inelul $(R, +, \cdot)$, $\mathbf{U}(R)$ mulţimea elementelor inversabile ale inelului R şi M° mulţimea elementelor simetrizabile ale monoidului $(M, \circ)$, unde

$$X \circ Y = X + Y + XY, \quad \text{pentru } X, Y \in M.$$

(i) Să se arate că următoarea corespondenţă

$$((a, X), (b, Y)) \longmapsto (a, X) * (b, Y) = \left(ab,\ X + aYa^{-1} + XaYa^{-1}\right).$$

determină pe mulţimea $G = \mathbf{U}(R) \times M^\circ$ o structură de grup.

(ii) Să se determine ordinul grupului $(G, *)$, dacă $R = \mathbb{Z}_3$ şi $n = 2$;

3. Fie $a, b \in (0, \infty), a \neq 1 \neq b$. Să se arate că

$$\int_x^{x^2} \left(a^{t^b} - b^{t^a}\right) dt \geq 0, \ \ \forall x \in (0, \infty) \Longleftrightarrow a = b.$$

4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie neconstantă, care admite un şir $(T_n)_{n \geq 0}$ de perioade strict pozitive convergent la zero. Să se stabilească dacă o astfel de funcţie admite primitive pe $\mathbb{R}$, respectiv dacă este integrabilă pe un interval $[a, b]$.