Concursul de Matematică "Gheorghe S. Nadiu"
Ediţia I, Oradea, Aprilie 2011

Subiecte clasa a XI-a

1. Să se arate că pentru orice matrice $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu $\det(A - B) \neq 0$ este verificată egalitatea:

$$A \cdot (A - B)^{-1} \cdot B = B \cdot (A - B)^{-1} \cdot A.$$

2. Fie $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel ca matricea $A + iB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ să fie inversabilă şi $(A + iB)^{-1} = C + iD$.

Să se arate că $|\det(A + iB)|^2 \cdot \det C = \det A$.

3. Să se determine toate funcţiile $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ care satisfac condiţiile:
   (i) f este de două ori derivabilă;
   (ii) $f'(x) \geq \max(f(x), f''(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă cu proprietăţile:
   (i) ecuaţia $f(x) = 0$ are o singură radcină reală;
   (ii) $f^{'}(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Arataţi că funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + \dfrac{f(x)}{f^{'}(x)}$ este surjectivă.