Concursul de Matematică "Gheorghe S. Nadiu" Ediţia I, Oradea, Aprilie 2011

Subiecte clasa a X-a

1. Să se determine funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ astfel încât

$$f(-x) + f(-ix) + f(ix) = x^2 + x + 1,$$

pentru orice $x \in \mathbb{C}$.

2.Fie $A = \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \frac{1}{3}\right\}$, $B = \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq \frac{1}{2}\right\}$ şi $r > 0$, $r \neq 1$.

a) Să se arate că $A + B = A \cdot B$, unde

$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}, \quad A \cdot B = \{a \cdot b \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

b) Dacă $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$ să se determine o mulţime nevidă $Y \subset \mathbb{C}$ astfel ca $X + Y = X \cdot Y \neq \mathbb{C}$.

3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea:

$$f(x + \sin x) \leq x \leq f(x) + \sin f(x), \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Să se rezolve inecuaţia $f(x) \geq x$.

4. Fie $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ astfel încât $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \cos(t_i - t_j) < 0$. Să se arate că $\left|\sum_{i=1}^{n} \cos(t_i + \varphi)\right| < \sqrt{n}, \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}.$